

# Statistik für Digital Humanities

## Lineare Regression

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik  
Computational Humanities  
**Universität Leipzig**

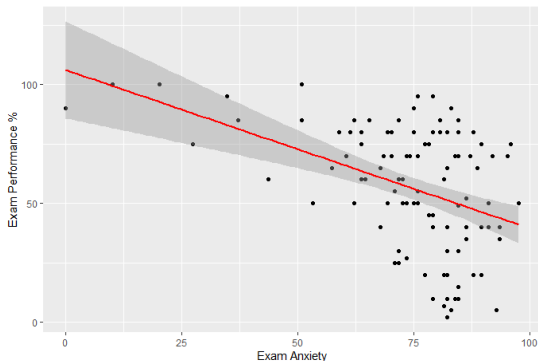
24. Mai 2021

[Letzte Aktualisierung: 20/06/2021, 14:01]

# Lineare Regression

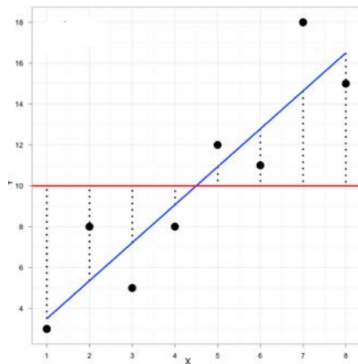
- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von unabhängigen Variablen
  - Step 1: Modellfitting auf Daten
  - Step 2: REGRESSION
  - Step 3: Outcome für neuen Prädiktor errechnet
- Wie viel Angst haben Studierende 10, 5 oder 2 Minuten vor der Prüfung?
- Wie viele Personen werden zu einer öffentlichen jährlich wiederholten Veranstaltung erwartet?
- Wie viele Alben verkaufen wir, wenn wir  $x$  Euro für Werbung ausgeben?
- Einfache Regression
  - 1 Prädiktor
- Multiple Regression
  - Mehr als 1 Prädiktor

# Regressionsgerade



```
data<-read.delim("Exam Anxiety.dat", header=TRUE)
graph<-ggplot(data, aes(Anxiety, Exam))
graph + geom_point(method="lm") + geom_smooth() +
  labs(x = "Exam Anxiety", y = "Exam Performance %")
```

# Regressionsgerade vs Mittelwert



Oversimplified:

Im Grunde versuchen wir die Mittelwertgerade zu kippen um dann  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  zu berechnen statt immer dieselben  $y$  für alle  $x$

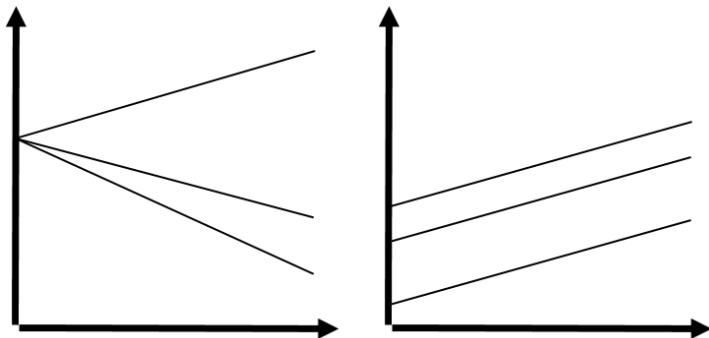
# Ausflug Gerade Linien

Gerade Linien durch 2 Parameter bestimmt

- a: Schnittpunkt mit Y-Achse (Intercept)
- b: Winkel (Slope, Gradient)

$$Y = a + b * X$$

Gleicher Intercept vs. Gleicher Gradient



# Regression als statistisches Modell

Kombiniere:

- *Ergebnis = Modell + Fehler*
- $Y = a + b * X$

Regressionsformel

- $\hat{Y}_i = (b_0 + b_1 * X) + \varepsilon_i$
- $\hat{Y}$  = vorhergesagtes Outcome
- $X$  = Prädiktoren
- **Regressionskoeffizienten**
  - $b_0$  = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - $b_1$  = Winkel der Geraden
- $\varepsilon$  = **Residual Term**
  - Beobachtete Abweichung vom Modell
  - oft nicht explizit angegeben

# Regressionskoeffizienten

## Regressionskoeffizienten

- $b_0$  = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - Position des Modells im geometrischen Raum
- $b_1$  = Winkel der Geraden
  - Richtung der Beziehung zwischen Prädiktor und Outcome
  - positiv: Je höher  $x$ , desto höher  $y$   
Übungszeit → Sprachverständnis
  - negativ: Je höher  $x$  desto niedriger  $y$   
Übungszeit → Freizeit
  - Je extremer  $b_1$ , desto mehr ändert sich  $y$  bei einer Verschiebung von  $x$
- $b$  meint meistens  $b_1$

# Berechnung

Methode Andy Field:

- Suche einen kleinen bärtigen Zauberer namens Nephwick the Line Finder (Frage ein Statistikprogramm)

Mathematischeres Vorgehen:

- Youtube StatisticsFun "How to calculate linear regression using least square method"
- <https://www.youtube.com/watch?v=JvS2triCg0Y>
- $b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$
- $b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x}$

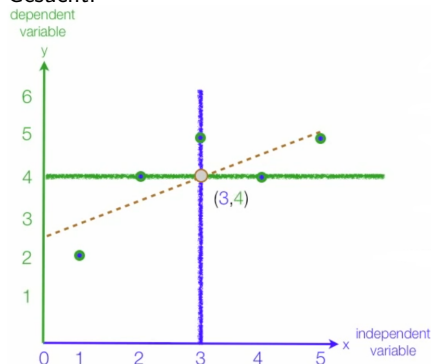


# Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben:

X	Y
1	2
2	4
3	5
4	4
5	5

Gesucht:



- Blaue vertikale Line =  $\bar{x}$
- Grüne horizontale Line =  $\bar{y}$
- Braune diagonale Line =  
Regressionslinie

# Methode der kleinsten Quadrate

	X	Y	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4		Sum:	10	6

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

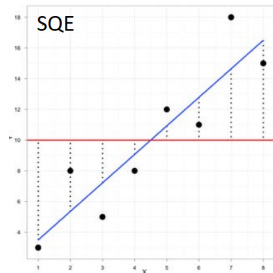
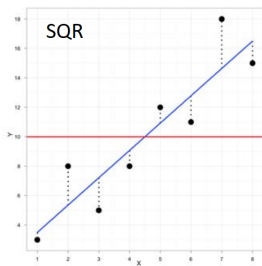
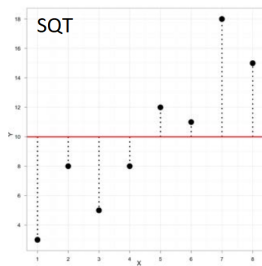
$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x} = 4 - 0.6 * 3 = 2.2$$

$$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = \underline{2.2 + 0.6 * X}$$

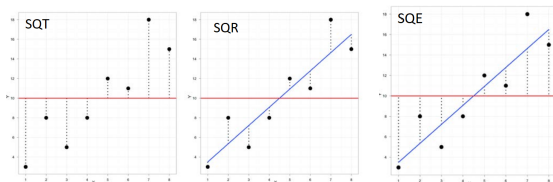
# Fitness einer Regression

- Regressionsline gilt als *Best Fit* für ein Regressionsmodell. . .
- . . . aber muss kein guter Fit sein

# Fitness einer Regressionslinie



# Fitness einer Regressionslinie



Abstände von Regression zu Beobachtung sind Residuen (Residuum)

- **Quadratsumme der Abweichungen**  $SQT = \sum (y_i - \bar{y})^2$
- **Residuenquadratsumme**  $SQR = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$
- **Erklärte Quadratsumme**  $SQE = \sum (\bar{y} - \hat{y}_i)^2$
- $R^2 = \frac{SQE}{SQT}$

Interpretation

- hohes  $SQE$  bedeutet hohe Verbesserung des Regressionsmodells gegenüber dem Mittelwert
- $R^2$  ist der Anteil der Variation im Outcome, der durch das Modell erklärt wird  
→ Fun Fact: Bei einfacher Regression gilt  $\sqrt{R^2} = \text{Pearsons } r$

# Fitness einer Regressionslinie

## Alternativ F-Test

- $MQ_x$  = Mittelwert der Quadrate von  $x$
- $MQE = \frac{SQE}{\text{Variablenanzahl}}$
- $MQR = \frac{SQR}{\text{Beobachtungen} - \text{Regressionskoeffizienten}}$
- F-Ratio  $F = \frac{MQE}{MQR}$
- $H_0$  = Alle Regressionskoeffizienten sind 0 Die Regressionslinie hat keine Vorhersagekraft
- Je höher F, desto besser das Modell
- Dazu später mehr...

# Fitness von Prädiktoren

t-Test:

- Allgemein:  $t = \frac{b_{observed} - b_{expected}}{SE_b}$  SE = Standardfehler =  $\frac{s}{\sqrt{n}}$
- $H_0 : b == 0 // b_{expected}$  ist bei uns also 0
- $\rightarrow t_{b==0} = \frac{b_{observed}}{SE_b}$
- $t_{kr}$  aus Tabelle ablesen ( $df = n - anz_{predictors} - 1 \rightarrow n - 2$  für einfache Regression)
- $abs(t) < t_{kr} \rightarrow H_0$  angenommen  $\rightarrow$  wahrscheinlich kein Effekt, der Unterschied zwischen  $b_{observed}$  und 0 ist nicht signifikant
- Dazu später mehr...

# Fitness einer Regression

$$b_1 = 0.6, b_0 = 2.2, \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$	$(\bar{y} - \hat{y})^2$
	1	2	2.8	4	0.64	1.44
	2	4	3.4	0	0.36	0.36
	3	5	4.0	1	1	0
	4	4	4.6	0	0.36	0.36
	5	5	5.2	1	0.04	1.44
Mean:	3	4	Sum:	6	2.4	3.6

- $SQT = 6, SQR = 2.4, SQE = 3.6$
- $R^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{3.6}{6} = 0.6 \rightarrow 60\%$  der Variation von Y durch X erklärbar
- $t = \frac{b_1}{\sigma_b} = \frac{0.6}{0.2828} = 2.12 < t_{kr} = 3.18 \rightarrow$  Effektstärke des Prädiktors nicht signifikant  
Standardfehler  $\sigma_b$  kommt vom R-Skript, kann aber auch analog zu vorher errechnet werden



# Lineare Regression in R

```
geubt<-c(1,2,3,4,5)
punkte<-c(2,4,5,4,5)
data<-data.frame(geubt, punkte)
regression<-lm(data$punkte ~ data$geubt)
summary(regression)
```

Residuals:

1	2	3	4	5
-0.8	0.6	1.0	-0.6	-0.2

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2.2000	0.9381	2.345	0.101
data\$geubt	0.6000	0.2828	2.121	0.124

Residual standard error: 0.8944 on 3 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.6, Adjusted R-squared: 0.4667  
F-statistic: 4.5 on 1 and 3 DF, p-value: 0.124

//12% Zufallswahrscheinlich (F Test)

//Mit 0 Übung sagt das Modell 2.2 Punkte voraus (Intercept)

# Vorhersage

Wir erinnern uns:

- Regressionsformel  $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

Wie kann man jetzt Vorhersagen treffen?

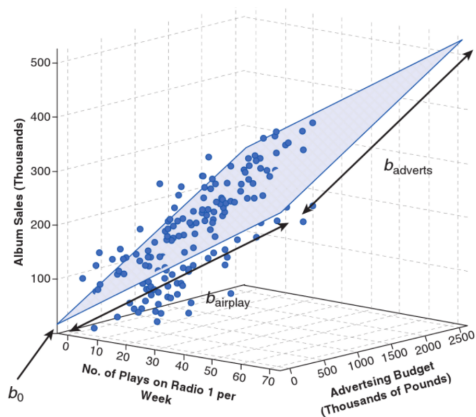
Einfach  $X$  einsetzen.

- $2.2 + 0.6 * 5$  *Übungszeit* = 5.2 *Punkte*
- $2.2 + 0.6 * 0$  *Übungszeit* = 2.2 *Punkte*
- $2.2 + 0.6 * 13$  *Buechergelesen* = 9 *Bibelzitate*

# Multiple Regression

- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von mehreren unabhängigen Variablen
- Outcome = (model) + Fehler
- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X_1 + b_2 * X_2 + \dots + b_n * X_n) + \varepsilon_i$
- $\hat{Y}$  = vorhergesagtes Outcome
- $X_i$  = Prädiktoren
- **Regressionskoeffizienten**
  - $b_0$  = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - $b_i$  = Koeffizient des Prädiktors  $X_i$
  - Wie viel Angst haben Studierende 10, 5 oder 2 Minuten vor der Prüfung in wie großen Gruppen?
  - Wie viele Alben verkaufen wir, wenn wir  $x$  Euro für Werbung ausgeben und einen Song  $y$  mal im Radio spielen lassen?

# Visualisierung



- Visualisierung schwierig
- 3 Prädiktoren (also ein Würfel) bereits schwer eindeutig darstellbar.

# Fitness

- $SQT, SQR, SQE$  analog zu linearer Regression berechenbar
- $R$  = Korrelation zwischen beobachteten  $Y$  und berechneten  $Y$
- Multiples  $R^2$  = Maßzahl für Fitness (1 → Perfekter Fit)

Aber:  $R^2$  steigt mit Anzahl der Prädiktoren, bevorteilt also Modelle mit mehr Prädiktoren, deshalb Sparsamkeitsbedachte Werte (Parsimony)

## **Akaike Information Criterion**

- $AIC = n * \ln\left(\frac{SQR}{n}\right) + 2k$
- $n$  = Anzahl der Fälle
- $k$  = Anzahl der Prädiktoren

Interpretation nur im direkten Vergleich bei Modelle mit gleichen Daten, absolute Werte bedeutungslos

Interpretation: Je höher desto schlechter der Fit

## **Bayesian Information Criterion** (Berechnung via R)

# Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

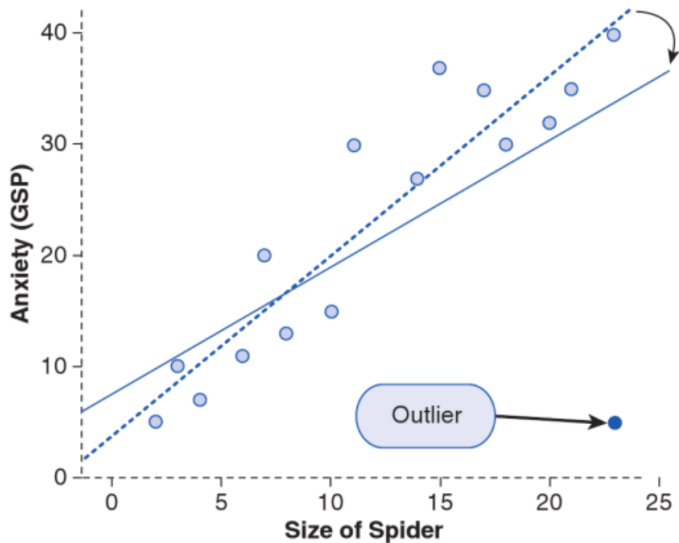
- Hierarchisch
  - Nach Einfluss auf Modell
  - Bekannte Prädiktoren zuerst (Bspw. Vorarbeiten)
  - Weitere gleichzeitig oder schrittweise oder wieder hierarchisch
- Erzwungen (Alle auf einmal)
- Schrittweise (Greedy)
  - *vorwärts*: Wähle Prädiktor, der am meisten erklärt solange *AIC* besser wird
  - *rückwärts*: Füge alle Prädiktoren ein und lösche die, deren Löschung *AIC* verbessert
  - *beidseits*: *Greedy vorwärts* mit *Greedy rückwärts* in jedem Schritt
  - Nachteil am Beispiel Anziehsachen: Wähle die wärmsten Kleidungsstücke → Unterwäsche vergessen
- Alle Teilmengen
  - Bewertung aller möglichen Permutationen
  - 2 Prädiktoren: 4 Permutationen, 3 Prädiktoren: 8 Permutationen
  - Fitnessbewertung mittels *Mallows C<sub>p</sub>*

# Evaluation von Regressionen

## 2 Schritte zur Bewertung der Korrektheit

- Schritt 1: Fitness bezogen auf eigene Daten (Extremwerte und Einflusstarke Werte)
- Schritt 2: Generalisierbarkeit, Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen?

# Extremwerte

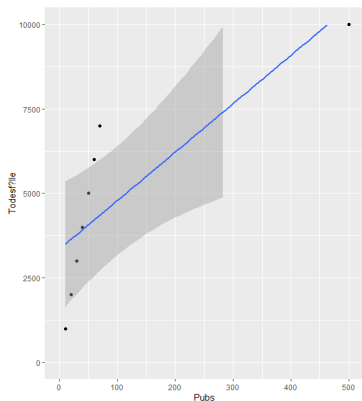
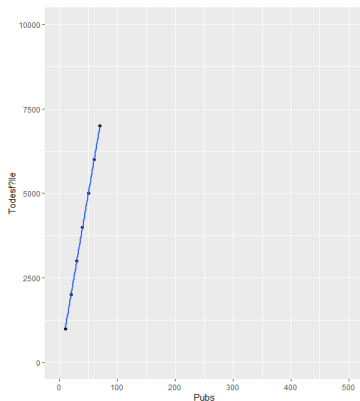




# Extremwerte

- Extremwerte kippen Regressionsgerade und erzeugen (wenn unpassend) Bias im Modell
- **Residuum  $R$**  = Abstand zwischen Regression und Beobachtung
- Extremwerte sind auffällig große Residuen
- Aber: Toleranz des absoluten Residuenabstand vom Modell abhängig
- → **Standardisierte Residuen  $SR = \frac{R}{s_R}$**
- Merkgeln, die aus Umwandlung in z-Scores folgen:
  - $SR > 3.29$  sind auffällig und unüblich
  - Wenn mehr als 1% der SR über 2.58 liegen, passt das Modell schlecht zu den Daten
  - Wenn mehr als 5% der SR über 1.96 liegen, passt das Modell schlecht zu den Daten

# Einflussstarke Werte



```
pubs <- c(10,20,30,40,50,60,70,500)
deaths <- c(1000,2000,3000,4000,5000,6000,7000,10000)
pubsdeaths <- data.frame(pubs,deaths)
graph <- ggplot(pubsdeaths, aes(pubs, deaths))
graph + geom_point() + xlim(0,500) + ylim(0,10000)
  + labs(x = "Pubs", y = "Todesfälle") + geom_smooth(method="lm")
```

# Einflussstarke Werte

- Einflussstarke Werte machen das Modell instabil
  - $DFFit_i$  = Differenz zwischen  $y_i$  mit und ohne Fall  $i$
  - Studentisiertes Residuum = Differenz zwischen  $y_i$  und ohne Fall  $i$  geteilt durch Standardfehler
  - Cooks Distance gibt Einflussstärke eines Falles auf Vorhersagen aller anderen Fälle wieder ( $> 1 \rightarrow$  Problemwert)
  - Hat-Value (Leverage/Hebelkraft): Durchschnitt berechnen  $\frac{k+1}{n}$ . Je mehr Abstand (Leverage) des Falls  $i$  zum Durchschnitt hat, desto höher ist der Einfluss

# Einflussstarke Werte

## Achtung:

- Influenzanalyse dient zur Bewertung eines Modells
- ...nicht zur Rechtfertigung einer Löschung eines Falls
- Gegenteil möglich: "Fall  $i$  ist Extremwert, aber da Cook Distance  $< 1$  muss er nicht gelöscht werden."

# Generalisierbarkeit

Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen? Das Modell hat weniger Bias, desto besser es folgende Annahmen erfüllt

- Prädiktoren haben Varianz  $> 0$
- Keine hohe Korrelation zwischen Prädiktoren (Multikollinearität)
- Prädiktoren korrelieren nicht mit externen Variablen
- Homoskedastizität (gleichmäßige Varianz der Residuen)
- Normalverteilung der Residuen mit Mittelwert 0
- Unabhängigkeit der Outcomes
- Linearität der Outcomes
- Variablentypen
  - Prädiktoren: Intervall oder 2 Kategorien
  - Outcome: Intervall, stetig, uneingeschränkt (Spanne von  $Y$  sollte Spanne der Datenpunkte nicht überschreiten)
- Unabhängigkeit der Fehler
  - Autokorrelation
  - Durbin-Watson Test

# Kreuzvalidierung

- Je ähnlicher die Vorhersagekraft des Modells für verschiedene Samples, desto generalisierbarer ist es
- $R^2$  nach Stein: (Achtung, Adjusted  $R^2$  in der Sprache  $R$  nach Wherry passt hier nicht)
  - Adjusted  $R^2 = 1 - \left[ \frac{n-1}{n-k-1} * \frac{n-2}{n-k-2} * \frac{n+1}{n} \right] * (1 - R^2)$
  - je höher, desto besser kreuzvalidiert das Modell
- Data Splitting
  - Daten zufällig teilen
  - Modell für Teilsamples berechnen
  - Generalisierbare Modelle sollten jetzt ähnliche Koeffizienten haben

# Strichprobengröße

- Je mehr, desto besser
- Oversimplified: Mindestens 10 bis 15 mal die Anzahl der Prädiktoren
- Green, Samuel B (1991): *How Many Subjects Does It Take to Do a Regression Analysis?*
  - Bei Modelltests  $n_{min} = 50 + 8 * k$
  - Bei fallbezogenen Tests  $n_{min} = 104 + k$
  - Regelfall (Beides) : Maximum beider Werte

# Zusammenfassung

- Regression erlaubt Abschätzen von  $Y$  für neue Werte aus  $X$
- Zur Beschreibung benötigen wir Winkel und Schnittpunkt der Linie
  - Methode der kleinsten Quadrate
- Regressionsformel  $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X)$
- $b_0$  und  $b_1$  sind Regressionskoeffizienten
- Als statistisches Modell hat eine Regressionslinie eine Fitness
  - Residuenquadratsumme, Erklärte Quadratsumme,  $R^2 =$  Verhältnis beider
  - F-Test möglich um Modell zu bewerten
  - t-Test möglich um Einflußstärke des Prädiktors zu bewerten
- 1 Prädiktor → Einfache Regression, Mehr als Prädiktor → Multiple Regression
  - Auswahl der Prädiktoren entscheidend
- Fitness der Regression zu Daten, Generalisierbarkeit
- Übersprungen: Multikollinearität, Annahmenbruch (Transformation der Residuen / Bootstrapping)