

Statistik für Digital Humanities

Vergleich mehrerer Mittelwerte: ANOVA & ANCOVA

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

07. Juni 2021

[Letzte Aktualisierung: 16/06/2021, 08:43]

Wiederholung t-Test

- Sind 2 Mittelwerte signifikant verschieden?

2 Arten von t-Tests

- Unabhängiger t-Test → Gruppendesign (verschiedene Probanden) Auch Independent-Measures oder Independent Samples t-Test
- Abhängiger t-Test → Messwiederholungsdesign (gleiche Probanden) Auch Matched Pairs oder Paired Samples t-Test

Warum nicht mehrere t-Tests durchführen um mehrere Mittelwerte zu vergleichen?

Familienbezogener / Experimentbezogener Fehler

- Problem: familienbezogene / experimentbezogene Fehlerrate $1 - (1 - \alpha)^k$ mit $k = \text{Anzahl der Kombinationen}$ α ist die Typ 1 Fehlerwahrscheinlichkeit
- vergrößert sich mit jedem zusätzlichen Test
 - 3 Gruppen → 3 Tests → Wahrscheinlichkeit für Typ 1 Fehler
 $1 - 0.95^3 = 0.143$
 - 5 Gruppen: → 10 Kombinationen → Wahrscheinlichkeit für Typ 1 Fehler
 $1 - 0.95^{10} = 0.401$, also 40%

ANOVA

- H_0 = Alle Mittelwerte sind statistisch ähnlich
- Omnibus Test: Zeigt Effekt an, aber nicht wo er passiert ist
 - $\overline{X_1} = \overline{X_2} \neq \overline{X_3}$
 - $\overline{X_1} \neq \overline{X_2} = \overline{X_3}$
 - $\overline{X_1} \neq \overline{X_2} \neq \overline{X_3}$
- Erstmal nur unabhängig, nächste Woche besprechen wir u.a. die abhängige Variante (Messwiederholung)
- Berechnung:
 - $F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{\text{Systematische Variation}}{\text{Unsystematische Variation}}$
 - $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
 - $MQR = \frac{SQR}{n-k}$
 - k = Anzahl der Gruppen

Abweichungsquadrate bei mehreren Mittelwerten

- **Quadratsumme der Abweichungen**

$$SQT = \sum (x_i - \text{Grand Mean})^2 \text{ Im Buch } SS_T$$

- **Residuenquadratsumme**

$$SQR = \sum (x_i - \overline{\text{group}})^2 = \sum s_{\text{group}}^2 * (n_{\text{group}} - 1) \text{ Im Buch } SS_R$$

- **Erklärte Quadratsumme**

$$SQE = \sum n_{\text{group}} * (\overline{\text{group}} - \text{Grand Mean})^2 \text{ Im Buch } SS_M$$

$$SQT = SQR + SQE$$

F

- $F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{\text{Systematische Variation}}{\text{Unsystematische Variation}}$
- $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
- $MQR = \frac{SQR}{n-k}$
- $k = \text{Anzahl der Gruppen}$

Interpretation:

- Je höher F , desto besser das Modell
- $F < 1 \rightarrow$ Unsystematische Variation ist größer als Systematische Variation
- $F < F_{kr}$ aus Tabelle $\rightarrow H_0$ kann nicht abgewiesen werden \rightarrow Alle Mittelwerte sind statistisch ähnlich
- $df(\text{Numerator}) = k - 1$
- $df(\text{Denominator}) = n - k$

Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels pro Autor

Autor 1	Autor 2	Autor 3
30	40	10
35	35	25
45	50	5

$$\overline{Autor1} = 36.667, \overline{Autor2} = 41.667, \overline{Autor3} = 13.333, G. Mean = 30.555$$

$$SQE = \sum n_{group} * (\overline{group} - G. Mean)^2 =$$

$$3 * (36.667 - 30.555)^2 + 3 * (41.667 - 30.555)^2 + 3 * (13.333 - 30.555)^2 = 1372.291$$

$$SQR = \sum (x_i - \overline{group})^2 = 116.667 + 116.667 + 216.667 = 450$$

$$MQE = \frac{SQE}{k-1} = \frac{1372.291}{2} = 686.145$$

$$MQR = \frac{SQR}{n-k} = \frac{449.998}{6} = 75$$

$F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{686.145}{75} = 9.149$ $F > F_{kr95}(2, 6) = 5.14 \rightarrow H_0$ kann abgewiesen werden \rightarrow Es gibt signifikante Unterschiede in den Mittelwerten

ANOVA in R

```
titlelength<-c(30,35,45,40,35,50,10,25,5)
group<-gl(3,3,labels=c("autor1","autor2","autor3"))
df<-data.frame(group,titlelength)
```

```
anovamodel<-aov(titlelength~group, data=df)
summary(anovamodel)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
group	2	1372	686.1	9.148	0.0151 *
Residuals	6	450	75.0		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

$Pr(> F) < 0.05 \rightarrow H_0$ kann abgewiesen werden

Robustheit von ANOVA

- ANOVA ist grundsätzlich erstmal parametrisch
- Wird oft als robust angesehen. . .
- . . . aber Robustheit in vielen Fällen nicht untersucht und viele Hinweise dagegen
- Bei gleichen Gruppengrößen eher robust.
- Bei heterogenen Varianzen kann Welchs F weiterhelfen
Welch, B.L. (1951): *On the comparison of several mean values: An alternative approach*
- Ausführlicher im Begleitmaterial "Andy Field - Robustheit von Anova" (Moodle)

Lokalisierung der Unterschiede

Wie finden wir jetzt heraus, welche Gruppen sich unterscheiden ohne die familienbezogene Fehlerrate zu stark ansteigen zu lassen?

- Geplante Kontrastierung: Spezifische Hypothese vorhanden
- Post Hoc Tests: Keine spezifische Hypothese vorhanden

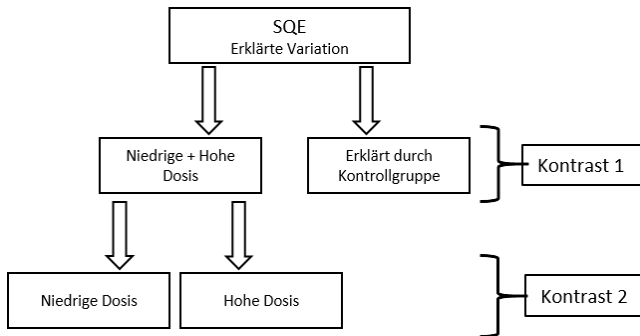
Geplante Kontrastierung

	Viagra	Libido
1	1	3
2	1	2
...		

	Viagra	Libido
6	2	5
7	2	2
...		

	Viagra	Libido
11	3	7
12	3	4
...		

Viagra: 1 = Kontrollgruppe, 2 = niedrige Dosierung, 3 = hohe Dosierung



Geplante Kontrastierung

- Wiederholter Vergleich zweier Variationen
- Hierarchisches Vorgehen
- Gezieltes Annähern anhand der Hypothese , die vorher festgelegt werden muss!

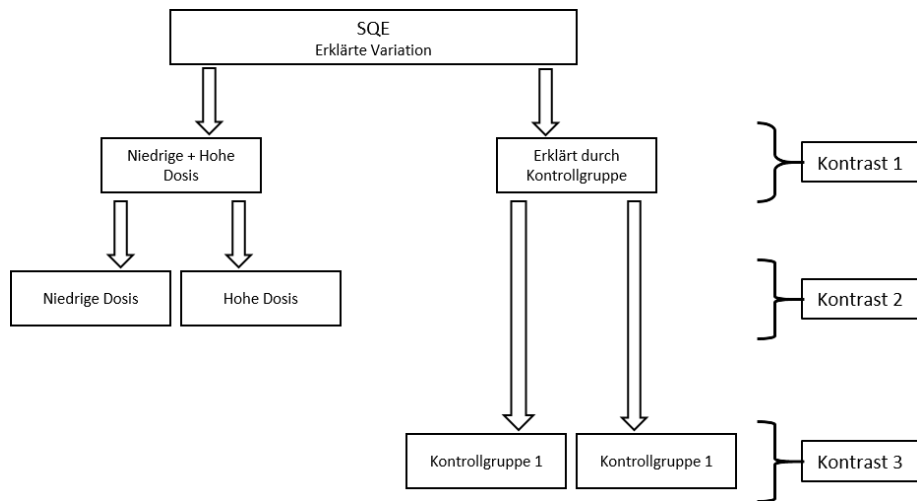
3 Regeln:

- Variation der Kontrollgruppen sollten gegen Variation der Experimentgruppen kontrastiert werden
- Jeder Kontrast darf nur 2 Variationen vergleichen
- Jede Gruppe darf nur Teil eines Kontrasts sein

Kontrastierung

- Auf übergeordneten Ebenen Vergleichswerte für zusammengesetzte Gruppen neu berechnen
 - bspw. Mittelwerte für Niedrige + Hohe Dosis
- Kontrastierung mit Multipler Regression mittels Dummy Variablen

Kontraste bei 4 Gruppen (Bsp: 2 Kontrollgruppen)



Berechnung Orthogonaler Kontraste

Schritt 1: Tabelle aufstellen

Schritt 2: Unbeteiligte Gruppen $\rightarrow 0$

Schritt 3: Linke Gruppe $-$, Rechte Gruppe $+$

Schritt 4: Gegenüberliegende Gruppenzahl eintragen

(Schritt 5: Orthogonalität prüfen)

Gruppe	Kontrast 1	Kontrast 2	Kontrast 1 * Kontrast 1
Placebo	-2	0	0
niedrig	+1	+1	+1
hoch	+1	-1	-1
SUM	0	0	0

Berechnung Orthogonaler Kontraste

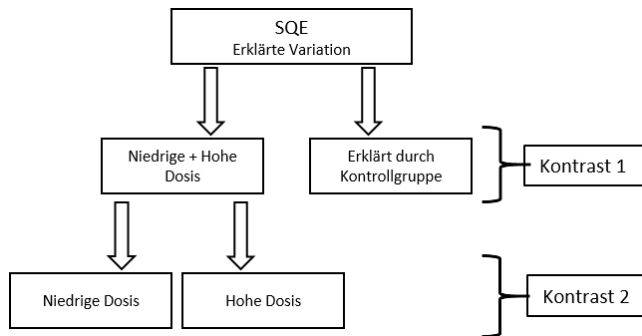
	Viagra	Libido
1	1	3
2	1	2
...		
6	2	5
7	2	2
...		
11	3	7
12	3	4
...		



	Viagra	Libido	Kontr1	Kontr2
1	1	3	-2	0
2	1	2	-2	0
...				
6	2	5	1	1
7	2	2	1	1
...				
11	3	7	1	-1
12	3	4	1	-1
...				

Kontrastierung über Multiple Regression

- Regressionsformel $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * \text{Kontrast1} + b_2 * \text{Kontrast2} + \dots)$



- $b_0 = \text{Grand Mean}$
- $b_i = \frac{\overline{\text{Links}} - \overline{\text{Rechts}}}{\text{Gruppenzahl}_{\text{Kontrast } i}}$
- $b_1 = \frac{\overline{\text{Niedrig} + \text{Hoch}} - \overline{\text{Kontrollgruppe}}}{3}$, $b_2 = \frac{\overline{\text{Niedrig}} - \overline{\text{Hoch}}}{2}$

Kontrastierung über Multiple Regression

```
libido<-c(3,2,1,1,4,5,2,4,2,3,7,4,5,3,6)
dose<-gl(3,5, labels = c("Placebo", "Low Dose", "High Dose"))
viagraDataContrast<-data.frame(dose, libido)
viagraData<-data.frame(dose, libido)
contrast1<-c(-2,1,1)
contrast2<-c(0,1,-1)
contrasts(viagraDataContrast$dose)<-cbind(contrast1, contrast2)
viagraPlannedContrast<-aov(libido~dose, data = viagraDataContrast)
viagraPlanned<-aov(libido~dose, data = viagraData)
```

```
summary.lm(viagraPlannedContrast)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	3.4667	0.3621	9.574	5.72e-07	***
dosecontrast1	0.6333	0.2560	2.474	0.0293	* //t-Wert f"ur Kontrast1
dosecontrast2	0.9000	0.4435	2.029	0.0652	. //t-Wert f"ur Kontrast2

```
summary.lm(viagraPlanned)
```

```
//Das hier ist falsch
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	2.2000	0.6272	3.508	0.00432	**
doseLow Dose	1.0000	0.8869	1.127	0.28158	
doseHigh Dose	2.8000	0.8869	3.157	0.00827	**

Post Hoc Tests

Grundidee:

- Mache paarweise Tests
- Angepasste Signifikanz verhindert, dass der kummulierte Typ 1 Fehler den Toleranzbereich überschreitet
- (konservativ) Bonferroni Korrektur: $p_{kr} = \frac{\alpha}{\text{Anzahl der Vergleiche}}$
Bonferroni, C.E. (1936): *Teoria Statistica Delle Classi e Calcolo Delle Probabilità*
- Pro Test steigt die Wahrscheinlichkeit von Typ 2 Fehlern (Vorhandener Effekt nicht festgestellt)

Post Hoc Tests

Verbesserung durch Abstufung:

Hochberg, Y. (1988): *A sharper Bonferroni procedure for multiple tests of significance*

Holm, S. (1979): *A simple rejective multiple test procedure*

Hommel, G. (1988): *A stagewise rejective multiple test procedure based on a modified Bonferroni test*

Grundidee Holm:1979 : Bereits abgearbeitete Vergleiche werden nicht mehr beachtet

- Berechne p für jeden Vergleich
- Sortiere p absteigend und vergebe Rang j
- $p_{kr} = \frac{\alpha}{j}$
- From $j=6$ TO $j=1$:
if $p < p_{kr} \rightarrow$ Unterschied ist signifikant
- Stoppe sobald $p > p_{kr}$
- Alle weiteren Unterschiede sind nicht signifikant

Post Hoc Tests

Verbesserung durch Aufstufung:

Benjamini, Y. & Hochberg, Y. (1995): *Controlling the false discovery rate – a practical and powerful approach to multiple testing*

Grundidee : Lieber Typ 2 Fehler als Typ 1 Fehler optimieren

- Berechne p für jeden Vergleich
- Sortiere p aufsteigend und vergebe Rang j
- $p_{kr} = \frac{j}{k} * \alpha$ mit k = Anzahl der Vergleiche
- From $j=6$ TO $j=1$:
if $p > p_{kr} \rightarrow$ Unterschied ist nicht signifikant
- Stoppe sobald $p < p_{kr}$
- Alle weiteren Unterschiede sind signifikant

Beispiel

Daten Siehe Superhero.dat im Moodle

* = signifikant

	p	Bonferroni $\frac{\alpha}{k}$	j_1	Holm $\frac{\alpha}{j_1}$	j_2	B. & H. $\frac{j}{k} * \alpha$
NT,Super	.000	.0083*	6	.0083*	1	.0083*
Super,Hulk	.0014	.0083*	5	.0100*	2	.0167*
Spider,Super	.0127	.0083	4	.0125	3	.0250*
NT,Spider	.0252	.0083	3	.0167	4	.0333*
NT,Hulk	.1704	.0083	2	.0250	5	.0417
Spider,Hulk	.3431	.0083	1	.0500	6	.0500

Effektstärke und ANOVA

- Determinationskoeffizient $R^2 = \frac{SQE}{SQT}$
- Weniger Bias: $\text{Omega}^2 \omega^2 = \frac{SQE - (k * MQR)}{SQT + MQR}$ mit k = Anzahl der Gruppen
- Guidelines für ω^2

Kirk, R.E. (1996): *Practical Significance: A concept whose time has come*

- .01 → gering
- .06 → moderat
- .14 → stark
- sehr kontextabhängig

Analysis of Covariance: ANCOVA

- ANOVA + Kovariate
- Kovariate: stetige Variablen, die nicht Teil des Experiments sind, aber die abhängige Variable beeinflussen
- ANOVA ist eigentlich "verkleidete" Regression und ANCOVA "verkleidete" multiple Regression

Anwendungsszenarien:

- Fehlervarianz innerhalb der Gruppen reduzieren
- Eliminierung von Bias durch Störvariablen

Wir schauen uns das Thema nur ganz grob an, genauer nachlesen bspw. hier:
Stevens, J.P. (2002): *Applied multivariate statistics for the social sciences*
Wildt, A.R. & Athola, O. (1978): *Analysis of covariance*

Beispiel

Dosis	Viagra	Libido	Libido Partner_In
1	1	3	4
1	1	2	1
...			

Dosis	Viagra	Libido	Libido Partner_In
2	2	7	5
2	2	5	3
...			

Dosis	Viagra	Libido	Libido Partner_In
3	3	9	1
3	3	5	3
...			

ANCOVA Beispiel mit Kovariate *Libido Partner_In*

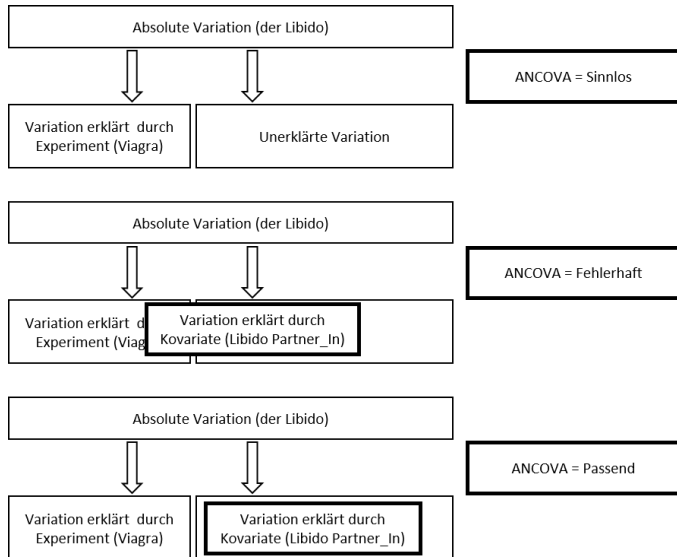
Dosis: 1 = Kontrollgruppe, 2 = niedrige Dosierung, 3 = hohe Dosierung

Voraussetzungen für ANCOVA

Zusätzlich zu Voraussetzungen für ANOVA muss gelten:

- Unabhängigkeit der Kovariaten von Prädiktoren
- Homogenität der Regressionslinien Prädiktoren (X) \rightarrow Kovariate (Y)

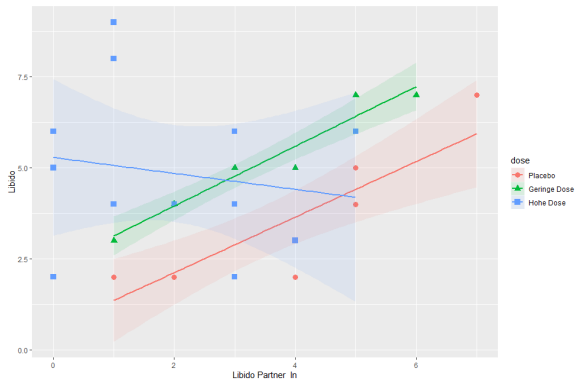
Unabhängigkeit der Kovariaten



Unabhängigkeit der Kovariaten

- Sicherstellen durch Randomisierung
- Test: ANOVA mit Kovariate als Outcome und unabhängige Variablen als Prädiktoren
- Wenn Test signifikante Unterschiede anzeigt → Analyse abbrechen
- Negativbeispiel: Analyse des Effekts von Ängstlichkeit auf Verhalten, Depression als Kovariate identifiziert → Depression korreliert stark mit Ängstlichkeit

Homogenität der Regressionslinien



Diagrammscript im Moodle (regressionslinienPlot.R)

- Pro Gruppe einfache Regression mit Kovariater als Outcome und Unabhängiger Variable als Prädiktor
- Regressionslinien im Beispiel sind heterogen (schlecht für ANCOVA)

Homogenität der Regressionslinien

- Regressionskoeffizienten verschiedener Gruppen sollten etwa gleich sein
- Heterogene Regressionslinien nicht zwangsläufig schlecht, können selbst zu interessanten Hypothesen führen
- → Multilevel Linear Models

Typen von Quadratsummen

- Quadratsummen auf 4 Arten berechenbar (Typ I, Typ II, Typ III, Typ IV)
- Typ I berechnet Einfluß eines Prädiktors abhängig von vorher hinzugefügten Prädiktoren
 - Einfügereihenfolge verändert Ergebnis, wird in R standardmäßig verwendet
- Typ III berechnet SQ nach Einfügen aller anderen Prädiktoren
 - Per default verwenden bei ANOVA mit mehreren Prädiktoren

ANCOVA via R

```
library(car)
libido<-c(3,2,5,2,2,2,7,2,4,7,5,3,4,4,7,5,4,9,2,6,3,4,4,4,6,4,6,2,8,5)
partnerLibido<-c(4,1,5,1,2,2,7,4,5,5,3,1,2,2,6,4,2,1,3,5,4,3,3,2,0,1,3,0,1,0)
dose<-c(rep(1,9),rep(2,8), rep(3,13))
dose<-factor(dose, levels = c(1:3), labels = c("Placebo",
        "Geringe Dose", "Hohe Dose"))
viagraData<-data.frame(dose, libido, partnerLibido)

contrasts(viagraData$dose)<-cbind(c(-2,1,1), c(0,-1,1)) #Siehe ANOVA Vorlesung
viagraModel<-aov(libido~ partnerLibido + dose, data = viagraData)
Anova(viagraModel, type="III") #Typ III Summenquadrate verwenden
```

Anova Table (Type III tests)

Response: libido

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)	
(Intercept)	76.069	1	25.0205	3.342e-05	***
partnerLibido	15.076	1	4.9587	0.03483	* <---Kovariate signifikant wenn p<0.05
dose	25.185	2	4.1419	0.02745	*
Residuals	79.047	26			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Test auf Homogenität der Regressionslinien

```
library(car)
libido<-c(3,2,5,2,2,2,7,2,4,7,5,3,4,4,7,5,4,9,2,6,3,4,4,4,6,4,6,2,8,5)
partnerLibido<-c(4,1,5,1,2,2,7,4,5,5,3,1,2,2,6,4,2,1,3,5,4,3,3,2,0,1,3,0,1,0)
dose<-c(rep(1,9),rep(2,8), rep(3,13))
dose<-factor(dose, levels = c(1:3), labels = c("Placebo",
        "Geringe Dose", "Hohe Dose"))
viagraData<-data.frame(dose, libido, partnerLibido)
contrasts(viagraData$dose)<-cbind(c(-2,1,1), c(0,-1,1)) #Kontrastierung

hoRS<-update(viagraModel, .~. + partnerLibido:dose) # Interaction Term
Anova(hoRS, type="III") #Typ III Summenquadrate verwenden

Anova Table (Type III tests)
Response: libido
```

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)	
(Intercept)	53.542	1	21.9207	9.323e-05	***
partnerLibido	17.182	1	7.0346	0.01395	*
dose	36.558	2	7.4836	0.00298	**
partnerLibido:dose	20.427	2	4.1815	0.02767	*
					//Pr<0.05: Regressionslinien //heterogen (schlecht)
Residuals	58.621	24			

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Zusammenfassung ANOVA

- ANOVA vergleicht mehrere Mittelwerte als Omnibus Test
- F-Verteilung
- Robustheit
- Familienbezogene Fehler bei paarweisen Vergleichen
- Lokalisierung von Unterschieden
 - Kontrastierung
 - Post Hoc Tests
- Determinationskoeffizient R^2 und quadriertes Omega ω^2 als Effektstärke
- Übersprungen: Weitere Kontrastierungen (Nicht-Orthogonal, Polynomial)

Zusammenfassung ANCOVA

- Analysis of Covariance (ANCOVA) = ANOVA + Kovariate
- Kovariate sollen Varianz außerhalb des Experiments teilweise erklären
- Voraussetzungen:
 - Siehe ANOVA
 - Unabhängigkeit der Kovariaten von Prädiktoren
 - Homogenität der Regressionslinien Prädiktoren (X) → Kovariate (Y)
- ANCOVA ist ein extrem komplexes Thema mit vielen Fallstricken, also sehr vorsichtig verwenden und Voraussetzungen absichern
- Übersprungen: Kontrastierung (Siehe ANOVA), Post-Hoc Tests (Tukey und Dunnets PH-Tests), Robustheit (Siehe Wilcox, 2005)